HOJA 2: GEOMETRÍA AFÍN

Rectas y planos en el espacio afín $\Re^3$

1) Dados los puntos P = (1, 1, 1) y Q = (0, 1, 2) y los vectores **u** = (–1, 2, 0), **v** = (1, –1, –1), halle las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas de $\Re^3$:
   a) recta que pasa por P con dirección **u** – **v**.
   b) recta que pasa por P y Q.
   c) recta que pasa por Q con dirección 3**v**.

2) Halle las ecuaciones de la recta que pasa por (1, 1, 1) y es paralela a la recta $\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$

3) Obtenga las ecuaciones implícitas de la recta que se apoya en las rectas r y s y es paralela a la recta t, donde

$$r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = -3z + 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 5z + 4 \\ y = 4z - 3 \end{cases} \qquad t: \{x = y = z$$

4) Dados los puntos P = (1, 2, 3), Q = (–1, –2, –3) y R = (0, 1, –1) y los vectores **u** = (0, 1, –1) y **v** = (5, 1, 2), halle las ecuaciones paramétricas e implícitas de los siguientes planos de $\Re^3$:
   a) plano que pasa por P, Q y R.
   b) plano que pasa por P y R y es paralelo a la recta que pasa por Q con dirección **u** – **v**.
   c) plano que contiene a R y cuyo subespacio de dirección es L{**u** + 2**v**, 2**u** + **v**}.

5) Obtenga las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes variedades afines de $\Re^3$:
   a) recta que pasa por el punto (1/2, –1, 2) y es paralela a la recta $s: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{-3}$
   b) recta paralela a la recta s del apartado anterior y que pasa por el origen.
   c) recta que pasa por (1, –1, 2) y es paralela a los planos $\alpha: 1 + x - 3y + 2z = 0$ y $\beta: \begin{cases} x = 1 - 3n + m \\ y = n - 2m \\ z = 2 + m \end{cases}$
   d) plano paralelo al eje *y*, y que pasa por los puntos (2, –1, 4) y (3, 0, –1).
   e) plano paralelo al plano $3x + 4y + z + 7 = 0$ y que corta al eje *x* en el punto de abcisa $x = -2$.
   f) plano paralelo al plano $x + y + 3z = 8$ y que pasa por el punto (2, –1, 0).
   g) plano que pasa por el punto de intersección de los tres planos siguientes:
      $1 - x + z = 0$, $-1 + y - 2z = 0$, $2 + 3x - y = 0$ y es paralelo al plano $2x - 3y + 6z + 7 = 0$.

6) Determine el plano que contiene a la recta $x = \dfrac{y-1}{2} = z + 3$, y es paralelo a la recta $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

7) Sean r la recta que pasa por (1, 0, –1) y tiene subespacio de dirección $\{(x, y, z) / x + y = 0, 2y + z = 0\}$ y s la recta que pasa por (–1, 1, 0) y (–3, 2, 1). Pruebe que se cortan y obtenga las ecuaciones paramétricas del plano que determinan.

8) Determine, si existe, la intersección de los siguientes pares de planos en $\Re^3$

$$a)\begin{cases}\pi_1 : x - y + z = 1 \\ \pi_2 : 2x + 2y - 3z = 4\end{cases} \qquad b)\begin{cases}\pi_1 : (x, y, z) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,-2) \\ \pi_2 : (x, y, z) = (0,1,0) + \lambda(0,1,-1) + \mu(2,3,5)\end{cases}$$

9) Determine la posición relativa de los siguientes pares de rectas de $\Re^3$ y si se cortan, encuentre el punto de intersección:

a) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + \alpha\,(4, 3, 2)$ $\qquad$ $(x, y, z) = (0, 1, 0) + \beta\,(1, 3, 2)$.

b) $\dfrac{x+4}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-4}$ $\qquad$ $\dfrac{x+9}{-5} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$

c) $\begin{cases}2x - 3y - z = 3 \\ x - 3y = 4\end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases}x + y = 2 \\ y - z = -1\end{cases}$

10) Averigüe la posición relativa de los planos siguientes tomados dos a dos:

π_1: $2x + 2y - z + 1 = 0$ $\qquad$ π_2: $x - y - 4z + 2 = 0$ $\qquad$ π_3: $4y + 7z - 3 = 0$ $\qquad$ π_4: $2x + 2y - z - 3 = 0$.

Variedades afines de $\Re^4$

11) Halle el hiperplano de $\Re^4$ que es paralelo al hiperplano definido por la ecuación $x - 2y + z - t = 0$ y pasa por el punto P = (0, 1, 1, 1).

12) Halle la intersección de los siguientes planos de $\Re^4$:

M_1 : {x + t = 0, y – z = 1} y M_2 : (x, y, z, t) = (0, 0, 1, –1) + L{(*a*, 2, 2, –4), (1, 0, 1, 0)}

según los valores del parámetro *a*.

13) Encuentre el valor del número real *a* para el que es no vacía la intersección de los planos S_1 y S_2:

$$S_1\begin{cases}x = a + 3\lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda - \mu \\ z = 4 + \lambda \\ t = 6 + 5\lambda + 2\mu\end{cases} \qquad S_2\begin{cases}x = 2 + \alpha + 2\beta \\ y = 1 \\ z = 1 + \alpha + \beta \\ t = 3\alpha\end{cases}$$

14) En $\Re^4$, halle un hiperplano paralelo al plano Π = (–1, 0, 1, 0) + L{(2, –1, –1, 1), (–1, 1, 2, 0)}, y que pase por los puntos P = (1, –1, 0, 0) y Q = (–1, 0, 0, 1).